E.N.S. Ulm et Sèvres 1985

GROUPE A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, $\mathcal{Q}$ désigne l'ensemble des formes quadratiques *positives non dégénérées* $q : (x, y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2$ sur $\mathbf{R}^2$, dont les coefficients a, b, c appartiennent à l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels. Pour une telle forme quadratique q, on pose $d(q) = 4ac - b^2$.

Les parties III, IV *et* V *du problème sont indépendantes l'une de l'autre.*

I

1° Pour quels nombres d existe-t-il une forme quadratique $q \in \mathcal{Q}$ telle que $d(q) = d$?

2° Montrer que pour toute forme quadratique $q \in \mathcal{Q}$ et tout entier $n \geqslant 0$, l'ensemble des vecteurs $\vec{v} \in \mathbf{Z}^2$ tels que $q(\vec{v}) = n$ est fini.

3° Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des endomorphismes f de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ tels que $f(\mathbf{Z}^2) = \mathbf{Z}^2$, muni de la loi de composition $(f, g) \longmapsto f \circ g$, est un groupe. Montrer que tout $f \in \mathcal{S}$ a un déterminant égal à 1 ou à -1 et que

$$\mathcal{S}^+ = \{ f \in \mathcal{S} \mid \det f = 1 \}$$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}$.

4° Soient q, q' des éléments de $\mathcal{Q}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}^+(q, q')$ des $f \in \mathcal{S}^+$ tels que $q' = q \circ f$ est fini.

Comment la relation $f \in \mathcal{S}^+(q, q')$ s'interprète-t-elle en termes de matrices (par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^2$) ?

5° Montrer que la relation $\sim$ sur $\mathcal{Q}$ définie par

$$q \sim q' \Leftrightarrow \mathcal{S}^+(q, q') \neq \varnothing$$

est une relation d'équivalence.

Parmi les nombres suivants associés à un élément q de $\mathcal{Q}$, quels sont ceux qui ne dépendent que de la classe d'équivalence de q pour la relation $\sim$?

a. L'entier $d(q)$;

b. L'entier $q((0, 1))$;

c. Le cardinal de $\mathcal{S}^+(q, q)$;

d. Pour un entier $n \geqslant 0$ donné, le cardinal de $\{ \vec{v} \in \mathbf{Z}^2 \mid q(\vec{v}) = n \}$; celui de $\{ \vec{v} \in \mathbf{N}^2 \mid q(\vec{v}) = n \}$;

e. Le plus grand commun diviseur $c(q)$ des coefficients a, b, c de la forme quadratique q.

II

Une forme quadratique $q : (x, y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2$ appartenant à $\mathcal{Q}$ est dite *réduite* si elle vérifie simultanément les deux conditions suivantes :

a. On a $|b| \leqslant a \leqslant c$;

b. Si a est égal à $|b|$ ou à c, on a $b \geqslant 0$.

1° Soit $q : (x, y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2$ une forme quadratique réduite. Montrer que l'on a :

$$a \leqslant \sqrt{\frac{d(q)}{3}}$$

$$\frac{\sqrt{d(q)}}{2} \leqslant c \leqslant \frac{d(q)}{3a}.$$

Dans quels cas l'une des inégalités précédentes est-elle une égalité ?

2° Les notations étant celles de 1°, déterminer le plus petit nombre de la forme $q(\vec{v})$, avec $\vec{v}$ dans $\mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}$. Quels sont les $\vec{v} \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}$ pour lesquels $q(\vec{v})$ est égal à ce nombre ?

3° Reprendre la question 2° en remplaçant $\mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}$ par $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$.

4° Montrer que toute classe d'équivalence pour la relation $\sim$ dans $\mathcal{Q}$ contient *une unique* forme quadratique réduite.

5° Décrire une méthode permettant de déterminer la forme quadratique réduite appartenant à la classe d'équivalence d'une forme $q \in \mathcal{Q}$ donnée. L'appliquer aux cas particuliers des formes $11x^2 + 7xy + 4y^2$ et $2x^2 + 10xy + 13y^2$.

6° Quel est le nombre de solutions $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ de l'équation :

$$2x^2 + 10xy + 13y^2 = n$$

pour les valeurs 0, 1, 11, 17, 65 de l'entier n ?

III

1° Soit $q : (x, y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2$ une forme quadratique réduite. Étudier, en fonction de a, b, c, le nombre d'éléments de $\mathcal{S}^+(q, q)$.

2° En déduire, pour toute forme quadratique $q \in \mathcal{Q}$, le nombre d'éléments de $\mathcal{S}^+(q, q)$ en fonction de $d(q)$ et $e(q)$ [notation de I.5°].

3° Soient $q \in \mathcal{Q}$ et $f \in \mathcal{S} - \mathcal{S}^+$. Montrer que la classe d'équivalence, pour la relation $\sim$, de $q \circ f$ ne dépend que de celle de q et ne dépend pas de f. Si $ax^2 + bxy + cy^2$ est la forme quadratique réduite appartenant à la classe de q, quelle est celle appartenant à la classe de $q \circ f$?

IV

Dans cette partie, d désigne un entier $\geqslant 1$ et $\mathcal{Q}_d$ l'ensemble des formes quadratiques $q \in \mathcal{Q}$ telles que $d(q) = d$.

1° Pour quels entiers $e \geqslant 1$ existe-t-il $q \in \mathcal{Q}_d$ telle que $e(q) = e$ [notation de I.5°] ? Applications numériques aux cas où $d = 5\,408$ et où $d = 1\,573$.

2° Montrer que $\mathcal{Q}_d$ est réunion d'un nombre fini $h(d)$ de classes d'équivalence de $\mathcal{Q}$ pour la relation $\sim$.

3° Exposer une méthode permettant de calculer $h(d)$. Applications numériques aux cas où d est égal à 48, à 163, à 167.

V

1° Soient q un élément de $\mathcal{Q}$ et n un entier $\geqslant 1$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a. Il existe des éléments x, y de $\mathbf{Z}$, premiers entre eux, tels que $q((x, y)) = n$;

b. Il existe une forme quadratique $q' : (x, y) \longmapsto a'x^2 + b'xy + c'y^2$ appartenant à $\mathcal{Q}$ telle que $q \sim q'$ et $a' = n$.

2° Soit n un entier $\geqslant 1$. Montrer qu'il existe un plus grand entier $m \geqslant 1$ tel que m^2 divise n. Montrer que pour tout entier $d \geqslant 1$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a. Il existe $q \in \mathcal{Q}$ et $\vec{v} \in \mathbf{Z}^2$ tels que $d(q) = d$ et $q(\vec{v}) = n$;

b. Il existe $r \in \mathbf{Z}$ tel que r^2 soit congru à $-d$ modulo $4\frac{n}{m^2}$.

3° Un entier $d \geqslant 1$ étant donné, montrer que si deux entiers $n_1 \geqslant 1$ et $n_2 \geqslant 1$ satisfont la condition *a* de la question précédente, il en est de même de leur produit.